

مبرهنة الشرط اللازم والكافي هي تكون الدالة

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m ; D \subset \mathbb{R}^n$$

$$x \rightarrow f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

مستمرة في النقطة x_0 من D هو أن تكون الدالة الحقيقية لعدة

$$f_i: D \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f_i(x)$$

مستمرة في النقطة x_0 حيث $i = 1, \dots, m$ $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow f_i(x)$

البرهان: لنفرض أن f مستمرة في النقطة x_0 عندئذ يقابل كل

عدد حقيقي موجب ϵ عدد حقيقي موجب δ بحيث إذا كان $x \in D$

$$|x - x_0| < \delta$$

$$|f(x) - f(x_0)| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(x) - f_i(x_0))^2} < \epsilon$$

وبالتالي

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| < \epsilon \quad i = 1, 2, \dots, m$$

وهذا يعني أن الدالة f_i مستمرة في x_0 كفاية الشرط

لنفرض أن الدوال f_i مستمرة في x_0 وعندئذ يقابل كل عدد

حقيقي موجب ϵ عدد حقيقي موجب δ بحيث إذا كان $x \in D$

$$|x - x_0| < \delta$$

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{m}} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

منه

$$|f(x) - f(x_0)| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(x) - f_i(x_0))^2}$$

$$< \sqrt{\frac{\epsilon^2}{m} + \dots + \frac{\epsilon^2}{m}} = \epsilon$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & ; x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

ادرس قابلية التفاضل عند النقطة (0,0)

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} - k \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,0)}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,0)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k^2 \sin \frac{1}{k}}{k} = 0 \Rightarrow \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2+k^2 \sin \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{1} = 0$$

f قابلة للتفاضل عند (0,0)

صيغة عامة:

بمفهوم المتتالية (X_k) في الفضاء R^n تقارب من النقطة $a = (a_1, \dots, a_n)$
إذا وفقط إذا تقاربت المتتاليات الكيفية $(X_{k_1}), \dots, (X_{k_n})$ من الأعداد
 a_1, \dots, a_n على الترتيب

الإثبات: نختار في الفضاء R^n المسافة المألوفة $d(x, y) = |y - x|$ وفي الفضاء
الإقليدي R^n المسافة

$$d_0 = [(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)] = \sup_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i|$$

لنضع الشرط: نفرض أن المتتالية $\{X_k\}$ تقارب من النقطة a عندئذ

$$\forall \varepsilon \in R_+^* : \exists N_\varepsilon ; \forall k \in \mathbb{N} ; k \geq N_\varepsilon$$

$$\Rightarrow d_0(X_k, a) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_{k_i} - a_i| < \varepsilon$$

وبالتالي

$$d(x_{k_i}, a_i) = |x_{k_i} - a_i| < \varepsilon$$

أيًا كان أحد المجموعة $\{1, 2, \dots, n\}$ وهذا يعني أن المتتالية الكيفية $\{x_{k_i}\}$
تقارب من النقطة a_i وذلك من أجل $i = 1, 2, \dots, n$
نفاية الشرط:

نفرض أن كل من المتتاليات $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$ تقارب
من النقاط (a_1, a_2, \dots, a_n) لا يضمن على الترتيب عندئذ يقارب

$$\forall \varepsilon \in R_+^* : \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N} ; \forall k \in \mathbb{N} ; k \geq N'_\varepsilon \Rightarrow d(x_i, a_i) = |x_{k_i} - a_i| < \varepsilon$$

وذلك أيًا كان $i = 1, 2, \dots, n$ وبالتالي فإن

$$d_0(X_k, a) = \sup |x_{k_i} - a_i| < \varepsilon$$

ولهذا ~~الشرط~~ يعني أن ~~المتتالية~~ $\{X_k\}$ المتتالية تقارب من

اسم الطالب : سليم عمار
العلامة : 100
المدة : ساعة ونصف

امتحان مقرر تحليل (4)
لطلاب السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2016/2015

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول : (22 علامة)

اذكر تعريف تقارب متتالية (x_n) في فضاء مترى (E, d) من نقطة a حيث $a \in E$ ، ثم
برهن أن المتتالية (x_k) في الفضاء \mathbb{R}^n تقارب من النقطة $a = (a_1, \dots, a_n)$ إذا وفقط إذا
تقاربت المتتاليات الحقيقية $(x_{k_1}), \dots, (x_{k_n})$ من الأعداد a_1, \dots, a_n على الترتيب .

السؤال الثاني : (21 علامة)

عرّف تكافؤ نظمين N_1 و N_2 على فضاء متجهي V ، ثم برهن أنه إذا كان V فضاء جداء
داخلي فإن الدالة $V \rightarrow \mathbb{R}_+ ; x \rightarrow \|x\| = \sqrt{(x, x)}$ تعرف تعظيماً على V .

السؤال الثالث : (15 علامة)

لتكن الدالة f المعرفة بالشكل $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث

$$0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \text{ فثبت أن } (x,y) \rightarrow f(x,y) = \frac{y^3 \sin x}{x^2 + y^2}$$

السؤال الرابع : (21 علامة)

عرّف استمرار التطبيق $f: E \rightarrow F$ بين فضاءين مترين (E, d_E) و (F, d_F) في نقطة
 $a \in E$ ، ثم برهن أن الشرط اللازم والكافي حتى تكون الدالة $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m ; D \subseteq \mathbb{R}^n$
حيث $x \rightarrow f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ مستمرة في النقطة x_0 من D هو أن
تكون الدوال الحقيقية لعدة متغيرات (المركبات)

$$f_i: D \rightarrow \mathbb{R} ; x \rightarrow f_i(x) , i = 1, \dots, m \text{ مستمرة في النقطة } x_0 .$$

السؤال الخامس : (21 علامة)

ادرس قابلية المقاصلة عند النقطة $(0,0)$ للدالة :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Subject _____

التاريخ _____

Date _____

الموضوع _____

$$f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \rightarrow \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \quad \text{اذا وجد النهاية}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{4x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0$$

وهذا يعني ان f لا يملك نهاية في $(0,0)$

$$\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z) = 0 \quad \text{حيث} \quad f(x,y,z) = x^2 y^2 z^2 \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2) \quad (2)$$

$$x^2 y^2 z^2 \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{x^2 y^2 z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

(1) تعريف:

ليكن V فضاء متجهي و N_1, N_2 نظمتين متكافئتين على V عندهن افضاءات مترية
المولدة من النظمين N_1, N_2 متكافئتان.
بما ان النظمين ~~متكافئتين~~ متكافئتين فان:

$$\alpha N_1(v) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x) \quad \forall x \in V$$

وبالتالي اياً كان $x, y \in V$ فان

$$\alpha N_1(x-y) \leq N_2(x-y) \leq \beta N_1(x-y)$$

وهذه

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$$

(2) تعريف:

النظمين N_1, N_2 يعرفان التولوجيا ذاتها على V
التي هي:

تفرز T_1 للتولوجيا المترية بالمساواة d_1 وتفرز T_2 للتولوجيا المترية بالمساواة d_2
وتعرف V عن طريق T_1 واذا كان $V = \emptyset$ فان $V \in T_2$

لتعرف $V \neq \emptyset$ وليكن x عن طريق V عندهن R حيث $3 \in R$:

$$B_1(x_0, \epsilon) = \{x \in V : d_1(x, x_0) < \epsilon\} \subset V$$

ولما كان

$$\alpha d_1(y, x_0) \leq d_2(y, x_0) \leq \beta d_1(y, x_0)$$

فيوجد $\epsilon = \alpha \epsilon$ من R^* حيث يكون

$$B_2(x_0, \epsilon) = \{x \in V : d_2(y, x_0) < \epsilon\} \subset V$$

$$B_2(x_0, \epsilon) \leq B_1(x, \epsilon) \subset V$$

حيث

هذا يعني ان $V \in T_2$ ومنه $T_1 \subseteq T_2$

المترية الداخلية:

اذا كان V فضاء متجهي فوق R عندهن المترية الداخلية على V هو d دالة حقيقية
على $V \times V$:

$$h: V \times V \rightarrow R, (x, y) \rightarrow h(x, y) = \langle x, y \rangle$$

تعريف الفضاء المتجهي

نقول عن V أنه فضاء متجهي حقيقي إذا تحققت الشروط التالية:

$$(1) \text{ مضافات } V \text{ : } x, y, z \in V \text{ فإن } (x+y)+z = x+(y+z)$$

$$(2) \text{ وجود عنصرا محاذا } 0 \text{ و } 1 \text{ في } V \text{ : } x+0 = 0+x = x$$

$$(3) \text{ وجود عنصر معكوس } -x \text{ في } V \text{ : } x+(-x) = (-x)+x = 0$$

$$(4) \text{ مضافات } V \text{ : } x, y \in V \text{ فإن } x+y = y+x$$

أي أن $(V, +)$ زمرة تبديلية

$$(5) \text{ مضافات } V \text{ : } x, y \in V \text{ وأي } a \in R \text{ فإن } a(x+y) = ax + ay$$

$$(6) \text{ مضافات } V \text{ : } x \in V \text{ وأي } a, b \in R \text{ فإن } (a+b)x = ax + bx$$

$$(7) \text{ أي } a \in R \text{ وأي } x \in V \text{ فإن } a(bx) = (ab)x$$

$$(8) \text{ أي } x \in V \text{ فإن } 1x = x$$

تعريف الفضاء المتجهي المركب

نعتبر V فضاء متجهي حقيقياً و F مجموعة جزئية غير خالية من V نقول عن F أنه فضاء متجهي جزئي من V إذا تحققت الشروط التالية:

$$(1) \text{ أي } x, y \in F \text{ فإن } x+y \in F$$

$$(2) \text{ أي } x \in F \text{ و } a \in R \text{ فإن } ax \in F \text{ ونلاحظ أنه}$$

$$a \in R \text{ و } u \in F \text{ فإن } au \in F$$

$$\text{تعريف الفضاء المتجهي المركب : فضاء متجهي حقيقي من نوع } F \text{ هو فضاء متجهي حقيقي من نوع } F \text{ و } F \text{ فضاء متجهي جزئي من } V$$

ليكن (E, d) فضاء متري و $M(E)$ مجموعة متجهات E فنقول عن $\{x\}$ أنه متناهي كوشي إذا قابلت كل عدد حقيقي موجب ϵ عدد صحيح $N(\epsilon)$ بحيث

$$\text{بشكل أن } p \geq N(\epsilon) \text{ و } q \geq N(\epsilon) \text{ فإن } d(x_p, x_q) < \epsilon$$

السؤال الأول : (18 علامة)

عرف متتالية كوشي في فضاء مترى ، ثم برهن أن كل متتالية متقاربة في فضاء مترى هي متتالية كوشي.

السؤال الثاني : (17 علامة)

15

لتكن f و g دالتين حقيقيتين معرفتين على المجموعتين الجزئيتين A و B من \mathbb{R}^n ولتكن a نقطة من $\overline{A \cap B}$ ولنفرض وجود النهايتين $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. فثبت أن :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

السؤال الثالث : (15 علامة)

افرض وجود نهاية للدالة f المعرفة بالشكل : $f: \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث

15

$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ في النقطة $(0,0,0)$ ، ثم بين فيما إذا كانت الدالة f مستمرة في تلك النقطة.

السؤال الرابع : (17 علامة)

عرف التمثيل المستمر بانتظام بين فضاءين مترين ، ثم أثبت أنه إذا كان $(V, \|\cdot\|)$ فضاء متكاملاً فإن التمثيل

$$f: V \rightarrow V : f(x) = \alpha_0 x : x \in V , \alpha_0 \in \mathbb{R}$$

17

السؤال الخامس : (18 علامة)

لتكن الدالة $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالشكل

$$f(x,y) = \begin{cases} x \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

غير قابلة للتفاضل في النقطة $(0,0)$.

السؤال السادس : (15 علامة)

احسب التكامل الثنائي $\iint_R (x+y) dx dy$ حيث السطح R محدود بالمعادلتين

15

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ و } x^2 + y^2 = 4 \text{ ومحور السين حيث } y \geq 0$$

Subject _____

تاريخ

Date _____

توقيع

مبرهن: إذا كانت d مقياساً متطابقاً في الفضاء المترى (X, d) فإن d متطابقاً مع
 المقياس N المتولد من d في الفضاء المترى (X, d) وفي الحقيقة
 يقال أن عدد مضيق موجب ϵ يولد مضيق موجب $N(\epsilon)$ إذا كان
 $p \geq N_\epsilon$ و $q \geq N_\epsilon$ فإن:

$$d(x_p, x_q) \leq \max\{d(x_p, a) + d(a, x_q)\}$$

ولذلك فإن:

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, a) + d(a, x_q)$$

وبما أنه:

$$d(x_p, a) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{و} \quad d(a, x_q) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

$$d(x_p, x_q) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

وهذا يعني أنه $\{x_n\}$ من متتالية كوشي.

تعريف الفضاء المترى:

ليكن X مجموعة و T أسرة من المجموعات الجزئية من X نقول عن T أنها
 طوبولوجياً على X إذا حققت الشروط التالية:

(1) اجتماع عناصر من T هو عنصر من T

(2) تقاطع عدد منتهي من عناصر T هو عنصر من T

(3) إن \emptyset و X تنتميان إلى T

تسمى هذه النظم:

إذا كانت V خطياً فمترياً فمترياً فإن النظم N على V تكون حالة حقيقية مترياً
 N مبنية على V :

$$N: V \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{و} \quad x \mapsto N(x)$$

$$N(x) \geq 0 \iff x \in V \quad \text{و} \quad x \in V \implies N(x) \geq 0$$

$$N(ax) = |a| N(x) \quad \text{أي أن N لا يتغير إذا ضربنا x بعدد حقيقي a غير صفر}$$

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y) \quad \text{أي أن N لا يتغير إذا أضفنا x و y معاً}$$

ونحقق الشرط التالي

$$\langle x, x \rangle \geq 0$$

$$\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

أياً كان x, y من V و α من R فإن

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$$

(ملاحظة)

يعد كل فضاء متجهي مرفق عليه جبراً داخلياً بـ: فضاء جبر داخلي

مبرهن: (المعادلة الشعاعية)

إذا كان V فضاء جبر داخلياً ففرض:

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

وهذا هو ما نريد إثباته

البرهان

إذا كان $y = 0$ فإن العلاقة صحيحة

نفرض أن $y \neq 0$ عندها نجد أن $\langle y, y \rangle > 0$ أي y حقيقي

$$0 \leq \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle$$

$$\text{وإذا فرضنا أن } \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \text{ فإن}$$

$$0 \leq \langle x, x \rangle - 2 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle}$$

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle}$$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

Subject _____

Date _____

نحتاج دالة داخلية:

$$V \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

أعلى V نثبت ذلك

لحسابه نثبت أنه يعبر عن الدالة الجيدة:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0 \quad \text{①}$$

$$\text{① } \|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0$$

$$\text{② } \|ax\| = \sqrt{\langle ax, ax \rangle} = \sqrt{a^2 \langle x, x \rangle} = |a| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |a| \|x\|$$

$$\text{③ } \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle \leq \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle} \\ = \|x\| \cdot \|y\|$$

هذه متباينة شيفارز بنائاً على

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\|$$

$$\|x\| + \|y\|$$

نحتاج بياناً في

(V, N) فضاء مترياً و N دالة على V معرفة بالنظم

(V, d) فضاء متري تام فنقول أيضاً N فضاء متري تام

إع

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

we choose δ s.t.

$$\exists \delta_3 \in \mathbb{R}^+ \text{ s.t. } x \in A, d(x, a) < \delta_3 \Rightarrow \\ |f(x) - p| < \min\left(\frac{\varepsilon}{3|q|}, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\exists \delta_4 \in \mathbb{R}^+ \text{ s.t. } x \in B, d(x, a) < \delta_4 \Rightarrow \\ |g(x) - q| < \min\left(\frac{\varepsilon}{3|p|}, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}}\right)$$

! s.t.

$$\exists \delta = \min(\delta_3, \delta_4) \in \mathbb{R}^+ \text{ s.t. } x \in A \cap B \\ d(x, a) < \delta \Rightarrow$$

$$|(f(x) \cdot g(x)) - (p \cdot q)| = |f(x) - p|q + (g(x) - q)p \\ + (f(x) - p)(g(x) - q)| \leq$$

$$|f(x) - p| |q| + |g(x) - q| |p| + |f(x) - p| \cdot |g(x) - q|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3|q|} |q| + \frac{\varepsilon}{3|p|} |p| + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} = \varepsilon$$

◀

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = pq$$

دالة d على X هي دالة $d(x, y)$ على $X \times X$ بحيث
 $d(x, y) \geq 0$ و $d(x, y) = 0$ اذا وفقط اذا $x = y$
 $d(x, y) = d(y, x)$ و $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
 $d(x, y) = 0$ اذا وفقط اذا $x = y$
 $d(x, y) = 0$ اذا وفقط اذا $x = y$

نقول ان (X, d) هي فضاء متري اذا وفقط اذا
 $N: F \rightarrow R$ و $x \rightarrow N(x) = \|x\|$

$S = \epsilon$ حيث $\epsilon > 0$ و $x, y \in X$ بحيث
 $\|x - y\| = S$ حيث $x, y \in X$ و $\|x - y\| \leq S$
 $\|x - y\| = S$ حيث $x, y \in X$ و $\|x - y\| \leq S$

$x, y \in X \rightarrow x \in (y, \epsilon)$ و $y \in (x, \epsilon)$

$S = \epsilon$ حيث $\epsilon > 0$ و $x, y \in X$ بحيث
 $d(x, y) = S$ حيث $x, y \in X$ و $d(x, y) \leq S$
 $d(x, y) = S$ حيث $x, y \in X$ و $d(x, y) \leq S$

$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ حيث $x, y \in X$ و $\|x\| = S$ و $\|y\| = S$

$x \rightarrow x + \alpha$ حيث $\alpha \in R$

$S = \epsilon$ حيث $\epsilon > 0$ و $x, y \in X$ بحيث
 $\|x - y\| = S$ حيث $x, y \in X$ و $\|x - y\| \leq S$
 $d(x, y) = S$ حيث $x, y \in X$ و $d(x, y) \leq S$

$$R \rightarrow V \rightarrow a \rightarrow ax_0 \quad x_0 \in V$$

نقال كل عدد حقيقي ϵ عدد حقيقي δ عددي
 حيث إذا كان $\|x - a\| < \delta$ فإن $\|ax - a\| < \epsilon$
 $\|ax_0 - bx_0\| = \|a - b\| \|x_0\|$
 $< \epsilon \quad \|x_0\| < \delta$

الآن نثبت من النظام

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

القضاء الإقليدي: لكل متجهين x, y في V فإن
 $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$
 $\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle$

$$x, y \in E \quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

حيث E فضاء إقليدي

$$\|x+y\|^2 = \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

في الفضاء الإقليدي

$$\|x+y\|^2 = \langle x_1+y_1, x_1+y_1 \rangle$$

$$\textcircled{1} \dots = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle$$

$$\textcircled{2} \dots = \langle x, x \rangle + \langle x, -y \rangle + \langle -y, x \rangle + \langle -y, -y \rangle$$

نجمع $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$ نجد

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle \\ &= 2(\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle) \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = P_2 \end{aligned}$$

المعادلة محققة

عبر f و g نلاحظ قضايا - متطابقة
 إذا كانت $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ ، $T \in \mathcal{L}(E, F)$
 عندها $\|L \circ T\| \leq \|L\| \cdot \|T\|$

البرهان: إذا كان $E = \{0\}$ فالمبراهنة صحيحة لنتخذ $E \neq \{0\}$

$$\|L \circ T\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \|L(Tx)\|$$

$$\sup_{x \in E \setminus \{0\}} \|L(Tx)\| = \|L\| \cdot \|T\|$$

تعريف التطبيق التآلفي: ϕ
 ليكن A, B فضاءين متآلفين فوق الفضاء F - المتجهي
 على الترتيب نقول عن التطبيق:

$$\phi: A \rightarrow B$$

أنه تآلفي إذا وجد نقطة a من A بحيث يكون التطبيق

$$\phi_a: F \rightarrow F$$

$$u \mapsto \phi_a(u) = \phi(a+u) - \phi(a)$$

دور عام نقول عن التطبيق $\phi: A \rightarrow B$ أنه تآلفي

إذا كان تطبيقاً تآلفياً للفضاء التآلفي A شارك A في

الفضاء التآلفي F شارك F في

وإذا كانت $\phi: A \rightarrow B$ تطبيقاً تآلفياً فنتيجة

$$\begin{aligned} \phi(x+u) - \phi(x) &= \phi(a+x-a+u) - \phi(a+x-a) \\ &= \phi_a(x-a+u) - \phi_a(x-a) \\ &= \phi_a(u) \end{aligned}$$

وبالتالي $\phi_x = \phi_a$ ومنه $\phi_x = \phi_a$ فيكون

تعريف: (قابلية المفاضلة)

ليكن F فضاءاً متجهياً معيَّناً فوق حقل F ونفرض أن D مجموعة جزئية من F ونقطة داخلية من D نقول عن الحالة

$$F: D \rightarrow F, \quad x \mapsto F(x)$$

أنها قابلة للمفاضلة إذا وفقط إذا كان F مستمرة عند النقطة a وإذا وجد تطبيق خطي مستمر $L: F \rightarrow F$ بحيث يكون

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_F} [F(a+h) - F(a) - L(h)] = 0$$

تعريف (نفاذ فرعية)

إذا كانت الحالة $F: D \rightarrow F$ و $D \subset F$

قابلة للمفاضلة عند النقطة الداخلية a من D فإننا نقول عن التطبيق الخطي المستمر $F \rightarrow F$ أنه نفاذ فرعية لـ F عند النقطة a ونرمز له بـ dF إذا كانت D مجموعة مفتوحة من F فإننا نقول عن الحالة $F: D \rightarrow F$ أن F قابلة للمفاضلة على D إذا كانت قابلة للمفاضلة في كل نقطة من D وعندها نرمز F للحالة

$$dF: D \rightarrow \mathcal{L}(F, F), \quad x \mapsto dF_x$$

Subject _____

التاريخ: _____

Date _____

الموضوع: _____

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2xy} & ; xy \neq 0 \\ 1 & ; xy = 0 \end{cases}$$

نريد ان نثبت ان $u(x, y)$ متصلة عند $(0, 0)$ اي ان $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} u(x, y) = u(0, 0)$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} u(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2xy}$$

$$\cos x - \cos y = \frac{\sin(x+y)}{2} - \frac{\sin(x-y)}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin x \cdot \sin y}{x \cdot y} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} u(x, y) = u(0, 0) = 1$$

وبما ان $u(0, 0) = 1$ فان $u(x, y)$ متصلة عند $(0, 0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$= u(1, 0)$$

الآن نثبت ان $u(1, 0)$ متصلة عند $(1, 0)$

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(1, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(1+y) \cdot \sin y}{(1)(y)}$$

$$= \sin 1 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}$$

$$= \sin 1 \cdot 1 = \sin 1 = u(1, 0)$$

الآن نثبت ان $u(1, 0)$ متصلة عند $(1, 0)$

المسألة

المسألة

المسألة

المسألة

المسألة

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(y-x)(1+x)}{(y+x)(1+y)}$$

$$(x,y) \rightarrow (0,0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y-x)(1+x)}{(y+x)(1+y)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x(1+x)}{x(1)} = -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (-1-x) = -1$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(y-x)(1+x)}{(y+x)(1+y)} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y(1)}{y(1+y)} = 1$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1+y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \right) f(x,y) \neq \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \right) f(x,y)$$

$$-1 \neq 1$$

المسألة

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(y-x)(1+x)}{(y+x)(1+y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(mx-x)(1+x)}{(mx+x)(1+mx)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(m-1)(1+x)}{x(1+m)x(1+mx)} = \frac{m-1}{m+1} \neq$$

المسألة

Subject _____

التاريخ _____

Date _____

الوقت _____

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

نريد (2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0}) = \sin$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0}) = \sin$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0}) = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0})$$

$$\sin = \text{المتكافئة}$$

$$\lim_{x^2 + 2y^2} \frac{xy}{x^2 + 2y^2}$$

$$\lim_{x^2 + 2y^2} \frac{m}{1 + 2m^2} = \frac{m}{1 + 2m^2}$$

$$y = mx$$

نريد

المتكافئة

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot y}{|x| + |y|}$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} y &\rightarrow 0 \\ x &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} r \rightarrow 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r \cos \theta + r \sin \theta} \right)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta \cdot \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \frac{0}{\cos \theta + \sin \theta}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{0}{\cos \theta + \sin \theta} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x,y) = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot y}{|x| + |y|} = 0 \quad \text{الناتج}$$

مثال 1: دالة $f(x,y)$ معرفة بـ $f(x,y) = \frac{y^3 \sin x}{x^2 + y^2}$

نريد أن نثبت أن f متصلة عند $(0,0)$ أي $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

$$f(x,y) = \frac{y^3 \sin x}{x^2 + y^2} \quad \text{حيث}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 \quad \text{نريد أن نثبت أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3 \sin x}{x^2 + y^2} \right] \quad \text{الكل}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(0) \sin x}{x^2 + (0)} = \frac{0}{x^2} \right] = 0 \quad \text{نعم، كل شيء يساوي 0} \quad \text{①}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^3 \sin x}{x^2 + y^2} \right] \quad \text{نعم، كل شيء يساوي 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3 \sin(0)}{x^2 + y^2} = \frac{0}{x^2} = 0 \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 0$$

التيه الاصله موجوده في الصفر دونه

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x, y) = 0$$

المتجه ~~المتجه~~ ∇f متجه درجه واحد الثانيه نلاحظ
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x, y$
 نلاحظ للمفاضله في كل نقطه (x_0, y_0) في \mathbb{R}^2 وان متفاضله هو
 المتجه المتجهه $df(x_0, y_0)$
 (الحال)

$$df_{(x_0, y_0)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (h, k) \rightarrow df_{(x_0, y_0)}(h, k) = y_0 h + x_0 k$$

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - y_0 h - x_0 k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{(x_0 + h)(y_0 + k) - x_0 y_0 - y_0 h - x_0 k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

لانه يعادل كل $0 < \epsilon$ يوجد $\delta = 2\epsilon$ في \mathbb{R}^2 ان $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$ في

$$\left| \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} - 0 \right| \leq \frac{1}{2} \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} < \frac{1}{2} \delta = \epsilon$$

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin x^2 y^2 \\ (e^{x^2} - 1)(e^{y^2} - 1) \end{cases}$$

نمكن الدالة الحقيقية

أثبت أن f قابلة للتفاضل في النقطة $(0,0)$ وتأكد من أن $df(0,0)$ هو التطبيق الصفري

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{F(h,k) - F(0,0) - df(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h \sin h^2 k^2}{(e^{h^2} - 1)(e^{k^2} - 1)(h^2 + k^2)^2}$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin h^2 k^2}{h^2 k^2} \cdot \frac{h^2}{e^{h^2} - 1} \cdot \frac{k}{e^{k^2} - 1} \cdot \frac{h k}{(h^2 + k^2)^2} =$$

وذلك لأن $(1) (1) (1) (1)$ غير صفرية

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin h^2 k^2}{h^2 k^2} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{e^{h^2} - 1} = 1$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{e^{k^2} - 1} = 1$$

مثال 1: دالة $f(x, y, z)$ معرفة في المجال D

بإحداثياتها المكانية $f(x, y, z) = \frac{\sin x y z}{x^2 + y^2 + z^2}$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$$

هل يوجد النهاية في النقطة $(0, 0, 0)$ ؟

الحل: إذا كانت المتتاليات (x_n, y_n, z_n) و (x'_n, y'_n, z'_n)

تؤولان إلى

$$1) (x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0, 0)$$

$$2) (x'_n, y'_n, z'_n) = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0, 0)$$

فلا بد أن:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n, z_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{3}{n^3}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n, z'_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{n^3}\right)}{\frac{5}{n^3}} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

بما أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n, z_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n, z'_n)$$

لذا $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} f(x, y, z)$ غير موجود

فإن دور $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{x^2 \cos y}{x^2 + y^2}$ هو ثابت

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

فبالإضافة عدد حقيقي موجب δ عدد حقيقي موجب ϵ بحيث إذا كانت

$$d((x,y), (0,0)) = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ و } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$d(f(x,y), 0) = |f(x,y)| = \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cos y \right|$$

$$\leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \epsilon$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

والتي هي موجودة

إذا كانت f الدالة المعرفة بـ:

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

①

$$(x,y) \mapsto x,y \ln(x^2 + y^2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

$$(x,y) \rightarrow (0,0)$$

فإن وجود النهاية

تلاص من البداية

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \ln z = 0$$

بما أن

والدالة g معرفة

$$g(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

$$(x,y) \rightarrow (0,0)$$